半無限計画に対する信頼領域法の拡張について(最適化の数理における離散と連続構造)

田中, 嘉浩

数理解析研究所講究録
945 巻 1996 年 35-45

半無限計画に対する信頼領域法の拡張について*

北海道大学経済学部　　田中 嘉浩 (Yoshihiro TANAKA)†

Abstract

Trust region methods are employed in the fields of nonsmooth optimization and nonlinear equations. A trust region approach for nonlinear programming problems which possesses a fast and global convergence property is presented in this paper.

Numerical methods for semi-infinite programming may be devided into two categories, namely, continuous methods and discretization methods. The trust region method which incorporates an exact L_∞ penalty function and ε-most-active strategy is expanded to obviate the Maratos effect. Schemes for discretization for semi-infinite programming problems are also shown.

1 序

信頼領域法は微分不可能最適化を中心に、連立非線形方程式の解法等幅広い分野で使われているが、本稿ではまず非線型最適化問題に対して信頼領域法に基づくSQP 法の拡張について述べる。

非線型計画法の有力なアルゴリズムとしては、SQP (Successive Quadratic Programming; 逐次2次計画) 法 や SLC (Successive Linearly Constrained; 逐次線形制約) 法等がある。SQP 法はLagrange 関数の曲率を反映した方法であるが、一般には制約の一次近似の為に、直線探索の評価関数が探索方向に少しも減少しない Maratos 効果とよばれる病的な現象が稀に起きることがある。Maratos 現象を回避する為に大別して２通りの方法が考案されている。一つは watchdog 法で、過去数回に比べ十分な減少が得られていれば、評価関数の減少しないステップ幅を許す方法である。もう一つは Mayne and Polak [10] により考案された bending 法で、適当な条件を探索方向が満たせば、別の部分問題を解いてその解との弧上の直線探索をする方法である。我々のアプローチは後者に属する。

半無限計画は設計問題を中心に応用が広く [12]、理論・解法の両面から多くの研究がなされてきている [8]。半無限計画の数値解法は連続法とパラメータの離散化法に大別することができる。連続法は交換法や局所減少法の様に各反復でパラメータに関する局所最大解を用いる方法であり、正確な解を求める方法である。離散化法はグリッド等を用いてパラメータ空間を離散化し、次第に精緻化していくことにより、近似解の精度を上げていく方法である。後者はその実行に全ての

*京都大学数理解析研究所講究録 (1996)

†E-mail: tanaka@econ.hokudai.ac.jp

局所最大解を求める手続きを含まず、通常の非線型計画法アルゴリズムで可能という長所をもっている。連続法として Hettich [7] は Newton 法を提案したが、局所的収束性があるにすぎなかった。Coope and Watson [1] は大域的収束性をもつ様に、正確な L_1 ペナルティ関数を評価関数に用いる SQP 法を開発している。しかしながら、正確な L_1 ペナルティ関数は許容領域外では不連続になることもあるので、連続性を保つため、筆者ら [15] は正確な L_∞ ペナルティ関数を用い、制約推定を行う SQP 法を提案した。Price and Coope [13] も正確な L_∞-type ペナルティ関数を用いる SQP 法を提案している。最近では内点法も試みられており、Ferris and Philpott [3] はアフィンスケーリング法の半無限線形計画への適用を試みた他、Todd [16] は、どんな内点法が離散化法による半無限計画法の数値解法に自然に拡張出来るかを調べているが注目に値する。

本稿では、L_∞ ペナルティ関数と ε 最アクティブ制約を用いた信頼領域法を Maratos 効果が起きない様に拡張することにより、各反復での制約を激減させた効果的なアルゴリズムを提案する。また、半無限計画問題へのパラメータの離散化法に伴う多制約非線形計画問題への適用を示した。

2 2次近似モデル

次の非線形計画問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{(P)}\quad &\text{minimize} && f(x) \\ &\text{subject to} && g_i(x) \leq 0, \quad i \in I_1 \equiv \{1, ..., m'\}, \\ &&& g_i(x) = 0, \quad i \in I_2 \equiv \{m'+1, ..., m\}. \end{aligned}$$

但し、$f : I\!R^n \to I\!R$, $g_i : I\!R^n \to I\!R$, $i = 1, ..., m$ は C^2 関数である。

ε 最アクティブ制約を、

$$I_\varepsilon(x) \quad \equiv \quad \{i \in I_1 \cup I_2 \mid g_i(x) \geq \max\{\max_{i \in I_1}[g_i(x)]^+, \max_{i \in I_2}|g_i(x)|\} - \varepsilon\},$$

但し、$[\cdot]^+ \equiv \max\{\cdot, 0\}$ で定義する。

正確な L_∞ ペナルティ関数は、

$$\theta_\varepsilon(x) = f(x) + r \ \max\{\max_{i \in I_\varepsilon(x) \cap I_1}[g_i(x)]^+, \max_{i \in I_\varepsilon(x) \cap I_2}|g_i(x)|\}, \tag{2.1}$$

但し、$r > 0$ で定義される。正確な L_∞ ペナルティ関数は $|I_\varepsilon(x)|$ の変化に関係ないので、ε 最アクティブ制約の使用を可能にする。

次の微分不可能最適化問題を考える。

$$\min \ \theta_\varepsilon(x). \tag{2.2}$$

定理 1. x^* を (P) の最適解、u^* をラグランジュ乗数とすると、$r > \sum_{i \in I_1 \cup I_2} u_i^*$ ならば、x^* と u^* が (P) の2次の十分条件を満たす必要十分条件は、x^* と u^* が (2.2) の2次の十分条件を満

たすことである。

[証 明] 最適解の近傍が存在しその近傍内で $\theta(x)$ の制約集合は不変であるから、[4] の Theorem 14.3.1 により結果が従う。 □

x^k での $\theta(x^k+d)$ の2次近似は、

$$\begin{aligned}\Theta_\varepsilon^k(d) &= Q^k(d) + r\ \max\{\max_{i\in I_\varepsilon(x^k)\cap I_1}[g_i(x^k)+\nabla g_i(x^k)^T d]^+,\\ &\qquad \max_{i\in I_\varepsilon(x^k)\cap I_2}|g_i(x^k)+\nabla g_i(x^k)^T d|\},\end{aligned}$$

但し、

$$Q^k(d) \equiv f(x^k) + \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2}d^T\nabla^2 L_\varepsilon(x^k,u^k)d,$$
$$L_\varepsilon(x^k,u^k) \equiv f(x^k) + \sum_{i\in I_\varepsilon(x^k)} u_i^k g_i(x^k).$$

である。初期モデルの各反復の部分問題は、信頼領域の下で (2.3) を最小化することであり、

$$\min \Theta_\varepsilon^k(d) \quad \text{s.t. } \|d\|_\infty \le \Delta^k. \tag{2.3}$$

となるが、次の様に書き直せる。

$$\begin{array}{lll}\text{(QP1)} & \text{minimize} & \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2}d^T B^k d + r\xi\\ & \text{subject to} & g_i(x^k)+\nabla g_i(x^k)^T d \le \xi, \quad i\in I_\varepsilon(x^k)\cap I_1,\\ & & |g_i(x^k)+\nabla g_i(x^k)^T d| \le \xi, \quad i\in I_\varepsilon(x^k)\cap I_2,\\ & & \|d\|_\infty \le \Delta^k, \quad 0\le \xi,\end{array}$$

一方、x^k での $\theta(x^k+d)$ の2次近似は、

$$\begin{aligned}\hat\Theta_\varepsilon^k(d) &= f(x^k)+\nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2}d^T F^k d\\ &+ r\max\{\max_{i\in I_\varepsilon(x^k)\cap I_1}[g_i(x^k)+\nabla g_i(x^k)^T d + \frac{1}{2}d^T G_i^k d]^+,\\ &\qquad \max_{i\in I_\varepsilon(x^k)\cap I_2}|g_i(x^k)+\nabla g_i(x^k)^T d+\frac{1}{2}d^T G_i^k d|\},\end{aligned}$$

但し F^k は $\nabla^2 f(x^k)$ を表し、G_i^k は $\nabla^2 g_i(x^k)$ を表す。この部分問題は $\tilde d$ を求めるものであるが、(2.3) と同様、次の様に書けるが2次計画問題ではない。

$$\begin{array}{lll}\text{(NQ)} & \text{minimize} & \nabla f(x^k)^T d + \frac{1}{2}d^T F^k d + r\zeta\\ & \text{subject to} & g_i(x^k)+\nabla g_i(x^k)^T d + \frac{1}{2}d^T G_i^k d \le \zeta, \quad i\in I_\varepsilon(x^k)\cap I_1,\\ & & |g_i(x^k)+\nabla g_i(x^k)^T d + \frac{1}{2}d^T G_i^k d| \le \zeta, \qquad i\in I_\varepsilon(x^k)\cap I_2,\\ & & \|d\|_\infty \le \Delta^k, \quad 0\le \zeta,\end{array}$$

ここで、(NQ) の Kuhn-Tucker 条件を考えると、

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla} f(x^k) &= \nabla f(x^k) - \frac{1}{2}\sum_{i\in I_\varepsilon(x^k)} \tilde{u}_i(\nabla \tilde{g}_i(x^k) - \nabla g_i(x^k)) \\
&= \nabla f(x^k) - \frac{1}{2}\sum_{i\in I_\varepsilon(x^k)} \tilde{u}_i G_i \tilde{d} + \sum_{i\in I_\varepsilon(x^k)} \tilde{u}_i o(\|\tilde{d}\|) \\
\tilde{\nabla} g_i(x^k) &= \frac{1}{2}(\nabla \tilde{g}_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)) \\
&= \nabla g_i(x^k) + \frac{1}{2} G_i \tilde{d} + o(\|\tilde{d}\|), \quad i \in I_\varepsilon(x^k),
\end{aligned}$$

但し、$\nabla \tilde{g}_i(x^k) = \nabla g_i(x^k + \tilde{d})$ 等の定義を用いると簡単に書ける。その結果と等価な問題は、次の様な $\hat{d}$ を求める2次計画問題になる。

$$\begin{array}{lll}
\text{(QP2)} & \text{minimize} & \tilde{\nabla} f(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T B^k d + r\zeta \\
& \text{subject to} & g_i(x^k) + \tilde{\nabla} g_i(x^k)^T d \le \zeta, \quad i \in I_\varepsilon(x^k) \cap I_1, \\
& & |g_i(x^k) + \tilde{\nabla} g_i(x^k)^T d| \le \zeta, \quad i \in I_\varepsilon(x^k) \cap I_2, \\
& & \|d\|_\infty \le \Delta^k, \quad 0 \le \zeta.
\end{array}$$

(QP1) と (QP2) で、$B^k = \nabla^2 f(x^k) + \sum_{i\in I_\varepsilon(x^k)} u_i^k \nabla^2 g(x^k)$ と定義されるが、実際には BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) 公式

$$B^{k+1} = B^k - \frac{B^k s^k s^{k^T} B^k}{s^{k^T} B^k s^k} + \frac{z^k z^{k^T}}{z^{k^T} s^k},$$

但し $B^0 = I_n$, $s^k \equiv x^{k+1} - x^k$, $y^k \equiv \nabla_x L(x^{k+1}, u^{k+1}) - \nabla_x L(x^k, u^{k+1})$, $z^k \equiv \theta y^k + (1-\theta) B^k s^k$,

$$\theta \equiv \begin{cases} 1, & (y^{k^T} s^k \ge 0.2 s^{k^T} B^k s^k), \\ \dfrac{0.8 s^{k^T} B^k s^k}{s^{k^T} B^k s^k - y^{k^T} s^k}, & (\text{その他}). \end{cases}$$

で計算できる。

探索方向の決定に一次元弧を利用する [10]。

$$x(\alpha) = x^k + \alpha \tilde{d} + \alpha^2 (\hat{d} - \tilde{d}), \tag{2.4}$$

直線（曲線）探索には、Armijo 規則を用いる。即ち、

$$\theta(x^k + d^k) = \theta(x(\alpha)) \le \theta(x^k) + \sigma\alpha[\Theta_\varepsilon^k(\tilde{d}) - \theta(x^k)]. \tag{2.5}$$

$\alpha = \beta^j$ $(0 < \beta < 1,\ j = 0, 1, \ldots)$ なる α を求めればいい。

信頼領域の大きさは、

$$\rho^k \equiv \frac{\Delta\theta^k}{\Delta\Theta_\varepsilon^k} = \frac{\theta(x^k) - \theta(x^k + d^k)}{\theta(x^k) - \Theta_\varepsilon^k(\tilde{d})}. \tag{2.6}$$

で調整する。

3 アルゴリズム

まず、プロトタイプを示す。

Algorithm 1

Data : $r > 0, \varepsilon > 0, 0 < \mu_1 < \mu_2 < 1, 0 < \gamma_1 < 1 < \gamma_2, 0 < \beta < 1, \alpha = \beta.$

Step 1 : 初期点 $x^0, u^0 \geq 0$, と $\Delta^0 > 0$ を選ぶ。$k = 0$ とおく。

Step 2 : (QP1) を解き、$\tilde{d}$ と $\tilde{u}$ を得る。$\tilde{d} = 0$ ならば、ストップ。

Step 3 : (QP2) を解き、$\hat{d}$ を得る。

Step 4 : (2.5) により d^k を得る。

Step 5 : (2.6) により ρ^k を得る。
$0 < \rho^k < \mu_1$ ならば、$x^{k+1} = x^k + d^k$, $u^{k+1} = \tilde{u}$, $\Delta^{k+1} = \gamma_1 \Delta^k$ とおく;
$\mu_1 \leq \rho^k < \mu_2$ ならば、$x^{k+1} = x^k + d^k$, $u^{k+1} = \tilde{u}$, $\Delta^{k+1} = \Delta^k$ とおく;
$\mu_2 \leq \rho^k$ ならば、$x^{k+1} = x^k + d^k$, $u^{k+1} = \tilde{u}$, $\Delta^{k+1} = \gamma_2 \Delta^k$ とおく;

Step 6 : $k = k + 1$ とおき、Step 2 へ行く。

実際には、(QP2) を各反復で毎回解く必要はない。

4 収束性

Algorithm 1 の大域収束性を保証する為に次の仮定を置く。

(i) $\{B^k\}$: 半正定値対称、一様有界

(ii) $\{x^k\}$, $\{\tilde{d}\}$, $\{\hat{d}\}$: 有界

(iii) $r > \sup\{\sum_{i=1}^m |\tilde{u}_i|\}$

定理 2. 適当な条件の下で、(P) に対する正確な L_∞ ペナルティ関数の一次の条件

$$\max_{u \in \partial h(g(x^\infty))} s^T(\nabla f(x^\infty) + r u^T \nabla g(x^\infty)) \geq 0, \quad \forall s \in I\!R^n.$$

を満たす x^∞ に収束する Algorithm 1 の $\{x^k\}$ の部分列が存在する。

[証 明] 簡単のために、$\varepsilon \gg 0$ とおく。その時結果は [4] の Theorem 14.5.1 より直ちに従う。□

更なる議論のために、次の仮定を追加する。

(iv) $\|x^k - x^*\|$、$\|\tilde{d}\|$ は 0 に収束する。

(v) 一次独立、狭義の相補性、2次の十分条件が成立する。

(P) の代わりに次の等式制約問題を考える。

$$\begin{array}{lll} \text{(P')} & \text{minimize} & f(x) \\ & \text{subject to} & g_i(x) = 0, \quad i \in \{i_1, i_2, ..., i_k\} \subset I_\epsilon(x). \end{array}$$

$g = (g_{i_1}, g_{i_2}, ..., g_{i_k})^T$, $N = (\nabla f_{i_1}, \nabla f_{i_2}, ..., \nabla f_{i_k})$, $A = (\tilde{\nabla} g_{i_1}, \tilde{\nabla} g_{i_2}, ..., \tilde{\nabla} g_{i_k})$ とする。この時 (P′) の Kuhn-Tucker 条件は、

$$B\tilde{d} + N\tilde{\lambda} = -\nabla f, \quad N^T\tilde{d} = -g$$

かつ

$$B\hat{d} + A\hat{\lambda} = -\tilde{\nabla} g, \quad A^T\hat{d} = -g$$

$N^T Z = O$ かつ $Z^T Z = I$ とする $n \times (n-k)$ 行列 Z を導入する。次の仮定は (P′) の唯一の解の存在を保証している ([6] を見よ)。

(vi) 縮約ヘッセ行列 $\{Z^T B^k Z\}$ は一様正定値である。

仮定 (vii) は超 1 次収束条件

$$\{\|x^k + \tilde{d} - x^*\| / \|x^k - x^*\|\} \to 0.$$

の成立を保証している。

(vii) $\{\|P(B^k - \nabla^2_{xx} L_\varepsilon(x^*, u^*))\tilde{d}\| / \|\tilde{d}\|\} \to 0$, 但し P は x での制約面の接平面への射影行列を表す。

補 題 1

$$\frac{\theta(x^k) - \theta(x^k + \hat{d})}{\theta(x^k) - \Theta^k_\varepsilon(\tilde{d})} = 1 + o(\|\tilde{d}\|)$$

[証 明] [5] の Lemma 3 の証明から明らかである。 □

定理 3. 定理 2 の条件及び適当な条件の下で Algorithm 1 により生成された点列 $\{x^k\}$ は x^* に超一次収束する。

[証 明] [5] の Theorem 2 と同様に、ステップ幅 1 $(\alpha = 1)$ が受け入れられている。補題 1 が成立するので、$\rho^k \to 1$ が成立する。故に結果は証明される。 □

5 数値例

例 1. (Chamberlain et al., 1982)

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && -x_1 + 10(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ &\text{subject to} && x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$x^0 = (0.8, 0.6)^T, \quad x^* = (1, 0)^T.$

この問題は、制約の一次近似に基づくため、通常の SQP 法では探索方向が評価関数を少しも減少させない Maratos 効果を起こす例である。各パラメータは、$\mu_1 = 0.25, \mu_2 = 0.5, \gamma_1 = 0.6, \gamma_2 = 2.0, \Delta^0 = 1, r^0 = 100$ とした。以下に、Algorithm 1 は、FORTRAN でコード化し、PC-UNIX 上の C に変換して数値実験した結果を示す。

表 1 は Algorithm 1 を 例 1 に適用した結果である。ITE は反復数、NQP は QP 部分問題を解く総回数を表す。提案した方法は、Step 4 を要するので NQP は ITE より大きくなっている。各反復共ステップ幅が 1 となっており、Maratos 効果を克服している。従来の方法 (Step 4 なし) で、反復数 79、$x^{79} = (0.9745, 0.2246)$ で変数が変化しなくなった (Maratos 効果が起きた) のに比べると大きな改善といえる。

表 2 は Algorithm 1 の挙動を示す($\varepsilon = 0.1$)。Algorithm 1 の挙動から、[5] のアルゴリズムの挙動と類似していることが分る。にも拘らず、Algorithm 1 は制約数を激減出来ている。

例 2. (半無限計画問題)

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && -x_1 + 10(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ &\text{subject to} && x_1^2 \cos y + x_2^2 - 1 \le 0, \quad y \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \\ & && -x_1^2 - x_2^2 + 1 \le 0 \end{aligned}$$

$x^0 = (0.8, 0.6)^T, \quad x^* = (1, 0)^T.$

に対して、区間を 100 等分した非線形計画問題に対し、$\varepsilon = 1.0$ では反復 2 (内 QP 4) 回、最大制約 102 本で収束するが、$\varepsilon = 0.01$ では、反復 2 (内 QP 4) 回、最大制約 12 本で収束する結果が得られている。

表 1. 例 1 の結果

ε	x_1^*	x_2^*	$f(x^*)$	$\lvert g(x^*)\rvert$	ITE	NQP
1.0	1.000	0.000	-1.0000	0.0000	2	4
0.1	1.000	0.000	-1.0000	0.0000	2	4
0.01	1.000	0.000	-1.0000	0.0000	2	4

表 2. Algorithm 1 の挙動 ($\varepsilon = 0.1$)

ITE	x_1^k	x_2^k	$\lvert g(x^k)\rvert$	$\theta(x^k)$
0	0.8	0.6	0.0	-0.8
1	0.998165	0.060550	0.116×10^{-5}	-0.9981
2	0.999999	0.000055	0.150×10^{-5}	-0.9999

表 3. 例 2 の結果

ε	x_1^*	x_2^*	$f(x^*)$	$\max_i g_i(x^*)$	ITE	NQP	MCON	CPU [sec]
1.0	1.000	0.000	-1.0000	0.0000	2	4	102	0.02
0.1	1.000	0.000	-1.0000	0.0000	2	4	37	0.01
0.01	1.000	0.000	-1.0000	0.0000	2	4	12	0.01

6 半無限計画法への適用

この節では、半無限計画 (Semi-Infinite Programming) 法への適用を考える。この節では次の問題を考える：

$$\begin{array}{lll} \text{(SIP)} & \text{minimize} & f(x) \\ & \text{subject to} & g(x,y) \le 0, \quad y \in Y, \end{array}$$

但し $Y \subset I\!R^\ell$、($\ell \ge 1$) である。以下の各方法は、(SIP) の厳密解を求めることを目的としている.

6.1 離散化法

Step 0 : グリッド $Y_0 \subset Y \subset I\!R^\ell$ と $\varepsilon_0 > 0$ を選ぶ。$\tilde{Y}_0 = Y_0$、$\nu = 0$ とおく。

Step 1 : $\tilde{Y}_\nu$、ε_ν として、Algorithm 1 で 解 x^ν を計算する。

Step 2 : より精緻化されたグリッド $Y_{\nu+1} \supset Y_\nu$ を決定する。

Step 3 : 新しい部分集合

$$\tilde{Y}_{\nu+1} = \{y \in Y_{\nu+1} \mid g(x^{\nu}, y) \geq \max g(x^{\nu}, y) - \varepsilon_{\nu}\}, \tag{6.1}$$

但し $\varepsilon_{\nu} > 0$ は

$$\varepsilon_{\nu} = \max\{\tau \cdot |\min_{y \in \tilde{Y}_{\nu}} g(x^{\nu}, y)|,\ \varepsilon_c\},$$

但し $\tau \approx 10^{-2}$、$\varepsilon_c > 0$ は定められた正数、によって計算される。

Step 4 : $l = l + 1$ として Step 1 にいく。

その結果

$$g_i(x) = g(x, y), \quad y \in \tilde{Y}_{\nu},$$

をこれ迄の通常の制約として扱う。

この方法は Algorithm 1 に容易に組み込むことが出来、その解は漸近的に厳密解に近づく。

定理 4. (SIP) の許容領域が空でなく、f の許容領域内のレベル集合がコンパクトであると仮定する。その時上記の手続きにより、(SIP) の解に収束する。

[証 明] [14] の Theorem 2.1 から明らか。 □

6.2 $g(x, \cdot)$ の局所最大解の利用

(SIP) の厳密解を得るために、陰関数

$$h_i(x) = g(x, y^i(x)), \tag{6.2}$$

但し $y^i(x)$ は Y 上の $g(x, \cdot)$ の局所最大解、を通常の制約として用いる。今簡単の為 $\ell = 1$ とする。

各 x、$y^i(x)$ に対し、

$$J_1(x, y^i) = \{i \mid \partial g(x, y^i)/\partial y \neq 0\}$$

と

$$J_2(x, y^i) = \{i \mid \partial g(x, y^i)/\partial y = 0\}.$$

とする。$J_1(x, y^i)$, $J_2(x, y^i)$ の代わりに、J_1, J_2 と記す。その時 $h_i(x)$ の 1階導関数は次式で与えられる。

$$\nabla h_i(x) = \nabla_x g(x, y^i).$$

行列 $\nabla^2_{xx} g(x, y^i)$ の負定値ならば、$h_i(x)$ の 2 階導関数は次式で与えられる。

$$\nabla^2 h_i(x) = \begin{cases} \nabla^2_{xx} g(x, y^i), & i \in J_1 \\ \nabla^2_{xx} g(x, y^i) - \nabla^2_{yx} g(x, y^i)(\nabla^2_{yy} g(x, y^i))^{-1} \nabla^2_{yx} g(x, y^i)^T, & i \in J_2 \end{cases}$$

この場合も正確なペナルティ関数の連続性を保つために、L_∞ ペナルティ関数の使用は本質的である [15]。この方法はしかしながら各最大解を計算しそれらを特定するのに少なからぬ手間が必要である。

参考文献

[1] I.D. Coope and G.A. Watson, "An projected Lagrangian algorithm for semi-infinite programming," *Mathematical Programming* 32 (1985) 337–356.

[2] J.E. Dennis Jr., S.B.B. Li and R.A. Tapia, "A unified approach to global convergence of trust region methods for nonsmooth optimization," *Mathematical Programming* 68 (1995) 319–346.

[3] M.C. Ferris and A.B. Philpott, "On affine scaling and semi-infinite programming," *Mathematical Programming* 56 (1992) 361–364.

[4] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization: Constrained Optimization*, (John Wiley, New York, 1981).

[5] M. Fukushima, "A successive quadratic programming algorithm with global and superlinear convergence properties," *Mathematical Programming* 35 (1986) 253–264.

[6] P.E. Gill, W. Murray, M.A. Saunders and M.H. Wright, "Constrained nonlinear programming," in: G.L. Nemhauser et al. eds., *Handbooks in OR & MS 1* (1989) 171–210.

[7] R. Hettich, "A comparison of some numerical methods for semi-infinite programming," in: R. Hettich, ed., *Semi-Infinite Programming* (Springer, Berlin, 1979) pp. 112–125.

[8] R. Hettich and K.O. Kortanek, "Semi-infinite programming: theory, methods, and applications," *SIAM Review* 35 (1993) 380–429.

[9] N. Maratos, "Exact penalty function algorithms for finite dimensional and control optimization problems," Ph.D. thesis, University of London, 1978.

[10] D.Q. Mayne and E. Polak, "A superlinearly convergent algorithm for constrained optimization problems," *Mathematical Programming Study* 16 (1982) 45–61.

[11] H. Mine, M. Fukushima and Y. Tanaka, "On the use of ε-most-active constraints in an exact penalty function method for nonlinear optimization," *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-29 (1984) 1040–1042.

[12] E. Polak, "On the mathematical foundations of nondifferentiable optimization in engineering design," *SIAM Review* 29 (1987) 21–89.

[13] C.J. Price and I.D. Coope, "An exact penalty function algorithm for semi-infinite programmes," *BIT* 30 (1990) 724–734.

[14] R. Reemtsen, "Discretization methods for the solution of semi-infinite programming problems," *Journal of Optimization Theory and Applications* 71 (1991) 85–103.

[15] Y. Tanaka, M. Fukushima and T. Ibaraki, "A globally convergent SQP method for semi-infinite nonlinear optimization," *Journal of Computational and Applied Mathematics* 23 (1988) 141–153.

[16] M.J. Todd, "Interior-point algorithms for semi-infinite programming," *Mathematical Programming* 65 (1994) 217–245.